

1. Gausov zakon (osnovni zakon elektrostatike)

Gausov zakon je osnovni zakon elektrostatičkih polja u vakuumu, koji omogućava neposredno i veoma jednostavno određivanje raspodele električnog polja i potencijala u nekim specijalnim, ali važnim slučajevima elektrostatičkih sistema visokog stepena simetrije.

Pretpostavimo da zatvorena površ S orijentisana prema spoljašnosti obuhvata k punktualnih naelektrisanja Q_i ($i = 1, \dots, k$), m naelektrisanih površi S_j površinske gustine elektriciteta σ_j ($j = 1, \dots, m$) i n naelektrisanih domena V_p zapreminske gustine elektriciteta ρ_p ($p = 1, \dots, n$) koji se svi nalaze u vakuumu. Ukupno naelektrisanje ΣQ koje obuhvata površ S je:

$$\Sigma Q = \sum_{i=1}^k Q_i + \sum_{j=1}^m \int_{\sigma_j} \sigma_j \cdot dS_j + \sum_{p=1}^n \oint_{V_p} \rho_p dV_p.$$

► **Gausov zakon (integralni oblik):** Izlazni fluks vektora jačine električnog polja u vakuumu, kroz bilo koju zatvorenu površ S jednak je količniku ukupne količine elektriciteta ΣQ obuhvaćene tom površi i dielektrične konstante vakuuma ϵ_0 . Veličina tog fluksa ne zavisi od usvojenog oblika površi i položaja njome obuhvaćenih naelektrisanja.

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{\Sigma Q}{\epsilon_0} \leftarrow \text{Gausov zakon.}$$

► **Gausov zakon (lokalni, ili diferencijalni oblik):** U svakoj tački električnog polja u vakuumu, koje stvaraju kontinualno raspodeljena naelektrisanja zapreminske gustine ρ važi lokalna, odnosno diferencijalna relacija $\text{div} \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$.

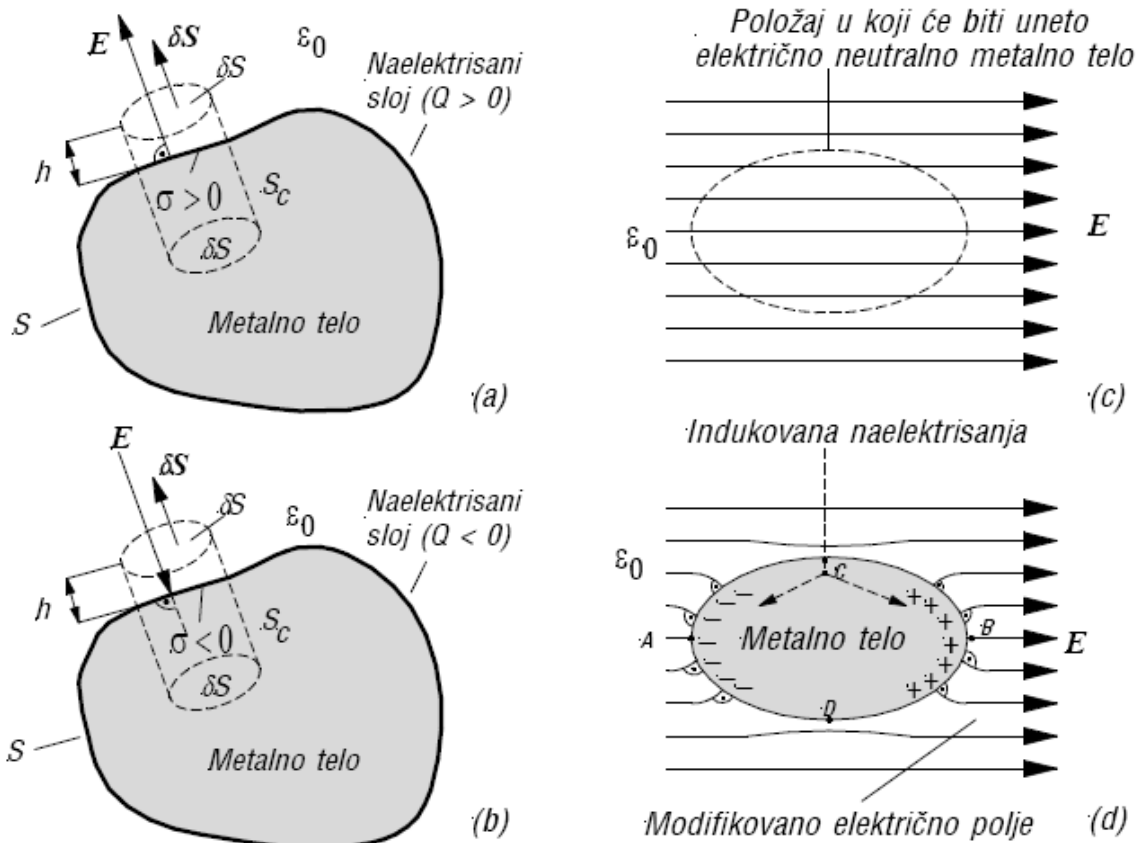
Iz lokalnog oblika Gausovog zakona zaključuje se da linije električnog polja izviru iz tačaka u kojima je zapreminska gustina naelektrisanja $\rho > 0$ ($\Leftrightarrow \text{div} \mathbf{E} > 0$), a da poniru u tačkama gde je ta gustina $\rho < 0$ ($\Leftrightarrow \text{div} \mathbf{E} < 0$). Izvori i ponori su tačke prekida linija električnog polja. Ako je u nekoj tački polja $\rho = 0$ ($\Leftrightarrow \text{div} \mathbf{E} = 0$), u njoj je linija polja neprekidna. Dakle, linije električnog polja su neprekidne samo u vakuumu između tačaka u kojima se nalaze naelektrisanja, dok se u supstanciji prekidaju, bilo na slobodnim, bilo na vezanim indukovanim naelektrisanjima.

2. Metalni provodnici u elektrostatičkom polju

Kod usamljenog metalnog tela proizvoljnog oblika koje se nalazi u vakuumu, ili u bilo kojem idealnom dielektriku, a naelektrisanog pozitivnom (sl. 1a) ili negativnom količinom elektriciteta Q (sl. 1b) elektricitet se u stanju elektrostatičke ravnoteže raspoređuje isključivo na graničnoj površi S . Takođe, tangencijalna komponenta električnog polja na površi tela mora biti ravna nuli.

Posmatrajmo usamljeno, električno neutralno metalno telo proizvoljnog oblika (na sl. 1c prikazano crtkastim linijama), koje je uneto u homogeno električno polje \mathbf{E} u vakuumu (sl. 1d) ili bilo kojem idealnom dielektriku. Posle unošenja posmatrano telo i dalje ostaje električno neutralno, ali usled elektrostatičke indukcije u njemu dolazi do razdvajanja opterećenja koja se neravnomerno raspoređuju po površi tela. Površinska gustina indukovanih opterećenja σ_i takva je da indukovano polje \mathbf{E}_i koje ona stvaraju u metalnom telu uvek poništava spoljašnje (strano) polje \mathbf{E} (tj. $\mathbf{E} + \mathbf{E}_i = \mathbf{0}$). Rezultujuće polje izvan tela dobija se superpozicijom polja \mathbf{E} i \mathbf{E}_i , usled čega se modifikuje spektar homogenog spoljašnjeg polja \mathbf{E} (sl. 1d). Tangencijalna komponenta polja na površi tela ne postoji.

► Kod izolovanog sistema metalnih tela u vakuumu ili u idealnom dielektriku, od kojih su neka naelektrisana, dok druga to ne moraju biti — bez obzira da li je taj sistem izložen dejstvu spoljašnjeg homogenog ili nehomogenog električnog polja — u stanju elektrostatičke ravnoteže ne postoji električno polje u unutrašnjosti niti njegova tangencijalna komponenta na površima tela. Linije električnog polja u dielektriku uvek su normalne na granične površi tela.



Sl. 1

Sada ćemo pomoću Gausovog zakona odrediti intenzitet električnog polja na površi metalnog tela u vakuumu kod koga je *poznata raspodela površinske gustine naelektrisanja* σ (sl. 1a i 1b).

Neka je S_c izabrana cilindrična Gausova površ sa osnovicom vrlo male površine δS u fizičkom pogledu i izvodnicom upravnom na graničnu površ S tela, čiji deo dužine h koji se nalazi u vakuumu, u graničnom procesu teži nuli ($h \rightarrow 0$). Iz Gausovog zakona tada sledi:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint_{S_c} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} +E \cdot \delta S, & \text{kada je } \sigma > 0 \\ -E \cdot \delta S, & \text{kada je } \sigma < 0 \end{cases} = \frac{\sigma \cdot \delta S}{\epsilon_0}$$

gde je $E = |\mathbf{E}|$ i $\delta S = |\delta \mathbf{S}|$.

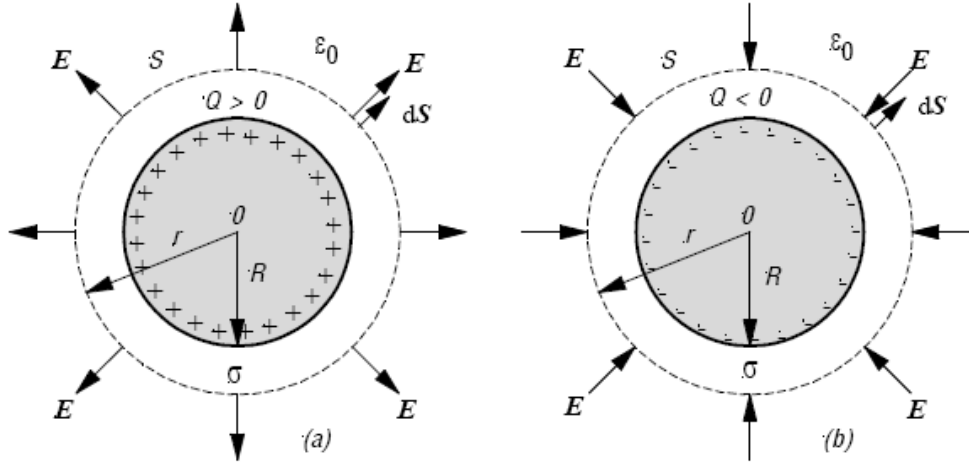
Iz prethodne relacije sledi da je u oba slučaja jačina električnog polja E u vakuumu u tačkama na graničnoj površi metalnog tela određena kao $E = |\sigma| / \epsilon_0$. Iz iskustva je poznato da je na metalnim telima površinska gustina naelektrisanja najveća na delovima sa najmanjim poluprečnikom krivine, a to su šiljci. Odatle je jasno da će upravo na šiljcima električno polje imati najveći intenzitet, što za posledicu ima brojne primene u raznim oblastima tehnike (gromobrani, vazduhoplovstvo, itd.).

3. Neke primene Gausovog zakona

► Električno polje i potencijal usamljene naelektrisane metalne sfere u vakuumu

Na sl. 2a i 2b prikazane su usamljene metalne sfere poluprečnika R koje se nalaze u vakuumu i naelektrisane su količinama elektriciteta $Q > 0$, odnosno $Q < 0$, respektivno. Zbog sferne simetrije

sistema, elektricitet se u oba slučaja raspoređuje po površima sfera *ravnomerno* sa površinskom gustinom naelektrisanja $\sigma = Q/(4\pi R^2)$. Električno polje ne postoji unutar sfera, a izvan njih ono je zbog sferne simetrije sistema *radijalnog* karaktera. Neka je S usvojena sferna Gausova površ poluprečnika $r \geq R$ koncentrična sa datom sferom i orijentisana prema spoljašnosti obuhvaćenog domena.



Sl. 2

Pošto su u svakoj tački površi S vektori \mathbf{E} i $d\mathbf{S}$ istog pravca i smera (sl. 2a), fluks električnog polja \mathbf{E} kroz površ S i njegov intenzitet $E=|\mathbf{E}|$ u tačkama na toj površi su:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S E \cdot d\mathbf{S} = E \oint_S dS = E \cdot 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}, \text{ te je } E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(\frac{R}{r} \right)^2, r \geq R.$$

Pošto su u svakoj tački površi S vektori \mathbf{E} i $d\mathbf{S}$ istog pravca, a suprotnog smera (sl. 2b), fluks električnog polja \mathbf{E} kroz površ S i njegov intenzitet E u tačkama na toj površi su:

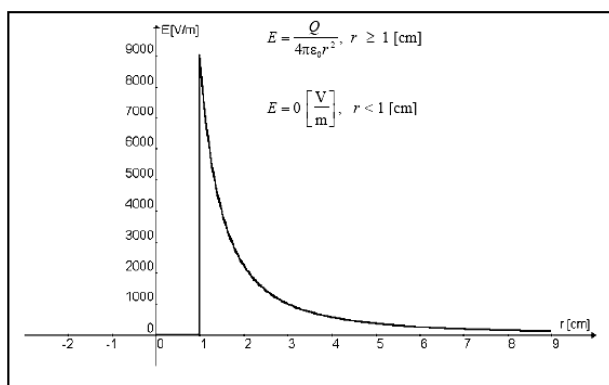
$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = - \oint_S E \cdot d\mathbf{S} = -E \oint_S dS = -E \cdot 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}, \text{ to je } E = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} = \frac{-\sigma}{\epsilon_0} \left(\frac{R}{r} \right)^2, r \geq R.$$

Ako je \mathbf{r} -vektor položaja tačaka izvan sfere u odnosu na njen centar, onda se iz prethodnih relacija zaključuje da je električno polje u vakuumu $\mathbf{E} = Q/(4\pi\epsilon_0 \cdot r^2)\mathbf{r}_0$, $r \geq R$, isto kao da ga generiše usamljeno punktualno naelektrisanje Q postavljeno u centar sfere.

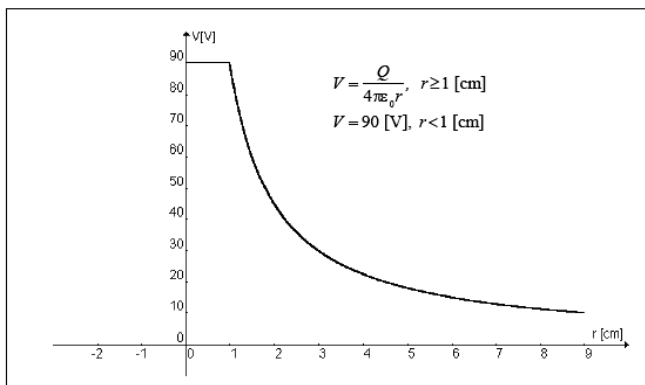
Potencijal tačke X sa vektorom položaja \mathbf{r}_x u odnosu na centar sfere ($r_x = |\mathbf{r}_x| \geq R$) i referentnu tačku usvojenu u beskonačnosti, dat je izrazom:

$$V_X = \int_X^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_X^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_X^\infty = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_X} - \frac{1}{\infty} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_X} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{R^2}{r_X}, r_x \geq R$$

Iz poslednje relacije zaključuje se da sve tačke na odstojanju $r \geq R$ od centra sfere pripadaju istoj ekvipotencijalnoj površi potencijala $V=Q/(4\pi\epsilon_0 r)$. Pošto u sferi nema električnog polja, tada *sve njene tačke* pripadaju ekvipotencijalnom domenu potencijala $V=Q/(4\pi\epsilon_0 R)$ računatom u odnosu na referentnu tačku u beskonačnosti. Za metalnu sferu u vakuumu, radijusa $R=1[\text{cm}]$ i naelektrisanu količinom elektriciteta $Q=0.1 [\text{nC}]$, na sl. 3 i 4 prikazane su raspodele intenziteta vektora jačine polja $E=E(r)$ i potencijala $V=V(r)$, respektivno, u funkciji odstojanja r tačaka od centra sfere, pri čemu je $\epsilon_0 = 10^{-9}/(36\pi)[\text{F/m}]$.



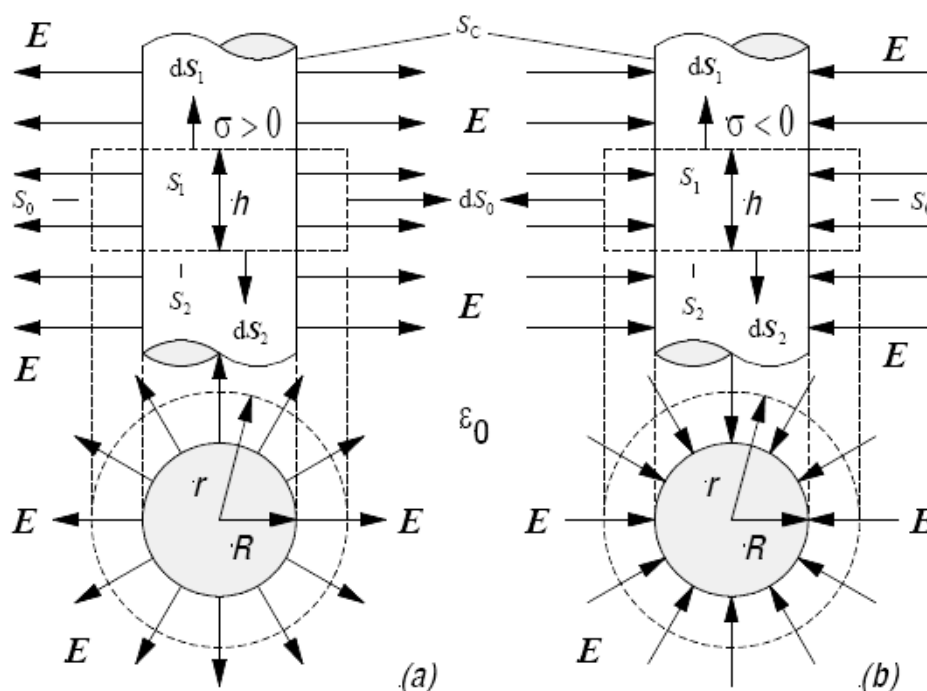
Sl. 3



Sl. 4

► *Električno polje i potencijal usamljenog neograničenog metalnog cilindra u vakuumu kružnog poprečnog preseka naelektrisanog sa konstantnom površinskom gustinom elektriciteta σ*

Na sl. 5a i 5b prikazan je naelektrisan metalni cilindar kružnog poprečnog preseka zajedno sa spektrom odgovarajućeg električnog polja, u slučajevima kada je $\sigma > 0$ i kada je $\sigma < 0$, respektivno. U unutrašnjosti cilindra ne postoji električno polje, dok u vakuumu linije tog polja moraju biti upravne na graničnu površ S_c cilindra. Posledica aksijalne simetrije sistema jeste i aksijalna simetričnost spektra električnog polja u vakuumu. Tada se Gausova površ $S_0 \cup S_1 \cup S_2$ može usvojiti u obliku koaksijalnog cilindra kružne osnovice poluprečnika r ($r \geq R$) i visine h .



Sl. 5

Primenom Gausovog zakona na cilindar prikazan na sl. 5a ($\sigma > 0$) dobija se:

$$\oint_{S_0 \cup S_1 \cup S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S},$$

pošto su fluksevi vektora jačine polja \mathbf{E} kroz osnovice cilindra, površi S_1 i S_2 jednaki nuli, jer su vektori \mathbf{E} i $d\mathbf{S}$ međusobno upravni na ovim površima.

$$\int_{S_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_0} E \cdot dS_0 = E \int_{S_0} dS_0 = ES_0 = E \cdot 2\pi rh = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma 2\pi Rh}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \begin{cases} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{R}{r}, & r \geq R \\ 0 & , r < R \end{cases},$$

jer u unutrašnjosti metalnog cilindra nema električnog polja.

Analogno, za negativno naleketrisani cilindar sa sl. 5b se dobija:

$$\int_{S_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = - \int_{S_0} E \cdot dS = -E \int_{S_0} dS = -ES_0 = -E \cdot 2\pi rh = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma 2\pi Rh}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \begin{cases} -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{R}{r}, & r \geq R \\ 0 & , r < R \end{cases},$$

Potencijal *bilo koje tačke X* na omotaču neograničene cilindrične površi kružnog preseka i radijusa r_X , koaksijalne sa metalnim cilindrom — u slučaju kada se *referentna tačka* (npr. *Y*) nalazi na rastojanju $r_Y \geq r_X$ od ose cilindra — određen je u oba slučaja sa sl. 5a i 5b izrazima:

$$V_X = \int_X^Y \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \int_{r_X}^{r_Y} \frac{dr}{r} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln \frac{r_Y}{r_X}, \quad r_X \geq R$$

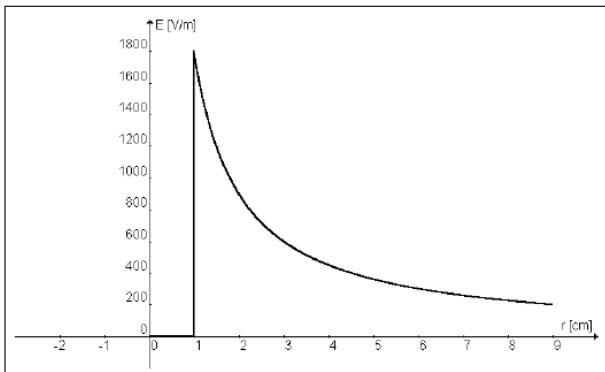
$$V_X = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln \frac{r_Y}{R}, \quad r_X < R.$$

Iz prethodnih relacija zaključujemo da se referentna tačka *Y* ne može nalaziti u beskonačnosti, jer bi tada $r_Y \rightarrow \infty$, pa bi i potencijal težio beskonačnosti, što je fizički apsurdno.

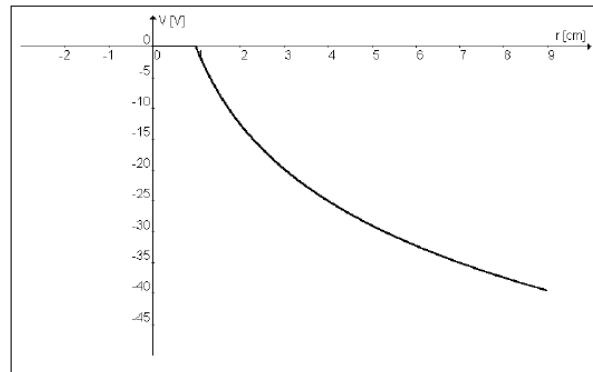
U slučaju tankog i dugačkog metalnog cilindra — štapa, često se koristi tzv. podužna gustina nalektrisanja $Q' = dQ/dl$, koja predstavlja količinu naelektrisanja štapa po jedinici dužine. Jačina polja i potencijal u odnosu na referentnu tačku na površini štapa ($r_Y = R$) su onda:

$$E = \begin{cases} \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}, & r \geq R \\ 0 & , r < R \end{cases}, \quad V = \begin{cases} \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{r}, & r \geq R \\ 0 & , r < R \end{cases}.$$

Za takav jedan metalni štap kod koga je $R=1$ [cm], a podužna gustina naelektrisanja $Q'=1$ [nC/m], na sl. 6 i 7 prikazane su funkcije $E=E(r)=|E|$ i $V=V(r)$, respektivno.



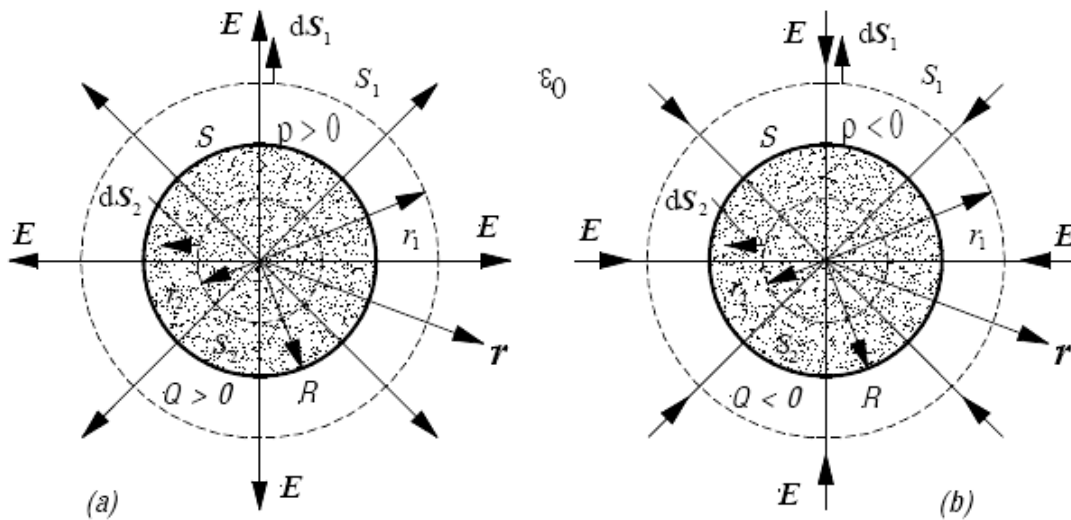
Sl. 6



Sl. 7

► *Električno polje i potencijal usamljenog sfernog domena (sačinjenog od dielektričnog materijala) u vakuumu homogeno naelektrisanog sa konstantnom zapreminskom gustinom elektriciteta ρ .*

Ovde ćemo pretpostaviti da je naelektrisanje Q homogeno raspoređeno u vakuumu (sl. 8) unutar sferne površi poluprečnika R sa zapreminskom gustina elektriciteta $\rho = \frac{Q}{(4/3)\pi R^3}$. Za raspodelu električnog polja E i potencijala $V(r)$ dobijaju se sledeći rezultati.



SL. 8

Za tačke unutar zapreminke naelektrisanog sfernog domena, $r \leq R$, primenom Gausovog zakona

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \oint_S E(r) \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}, \text{ jer su vektori } \mathbf{E} \text{ i } d\mathbf{S} \text{ kolinearni na površi sfere poluprečnika } r.$$

Leva strana Gausovog zakona je onda: $\oint_S E(r) \cdot d\mathbf{S} = E(r) \cdot \oint_S d\mathbf{S} = E(r) \cdot 4\pi r^2$.

Gausovom sferom poluprečnika r obuhvaćena je količina naelektrisanja $Q(r) = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$, pa je:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3, \text{ što nakon sređivanja daje}$$

$$E(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r, \quad r < R.$$

Za tačke izvan sfernog domena, $r > R$, analognim postupkom dobija se:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow E(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2}, \quad r > R.$$

Linijskom integracijom vektora jačine polja za potencijal tačaka unutar sfernog domena, $r \leq R$, u odnosu na referentnu tačku u beskonačnosti dobija se:

$$V(r) = \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^R \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_R^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}. \text{ Birajući za putanju integracije pravac kolinearan vektoru } \mathbf{E} \text{ sledi}$$

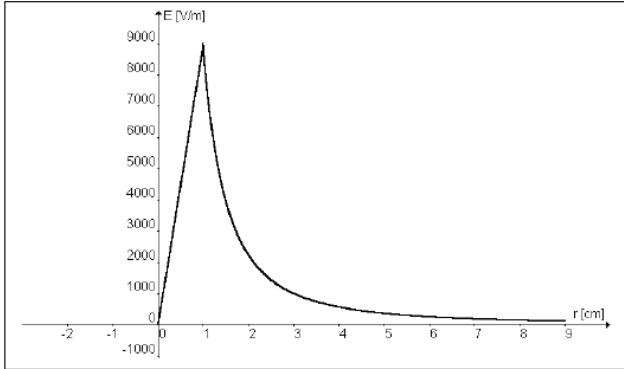
$$V(r) = \int_r^R E \cdot dr + \int_R^\infty E \cdot dr = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \int_r^R r \cdot dr + \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2}$$

$$V(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{r^2}{2} \Big|_r^R + \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_R^\infty = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right) + \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2), \quad r \leq R.$$

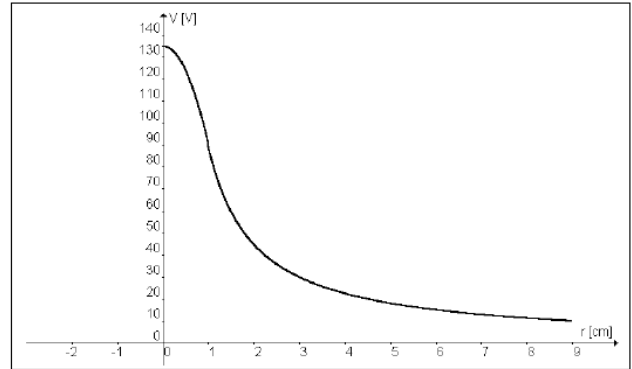
Za tačke izvan sfernog domena:

$$V(r) = \int_r^\infty E \cdot dr = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_r^\infty = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r}, \quad r > R.$$

Za homogeno raspoređeno naelektrisanje $Q=0.1$ [nC] u vakuumu u sferi poluprečnika $R=1$ [cm], na sl. 9 i 10 prikazane su funkcije $E=E(r)=|E|$ i $V(r)$, respektivno.



Sl. 9



Sl. 10

► Električno polje homogeno naelektrisanih ravni u vakuumu

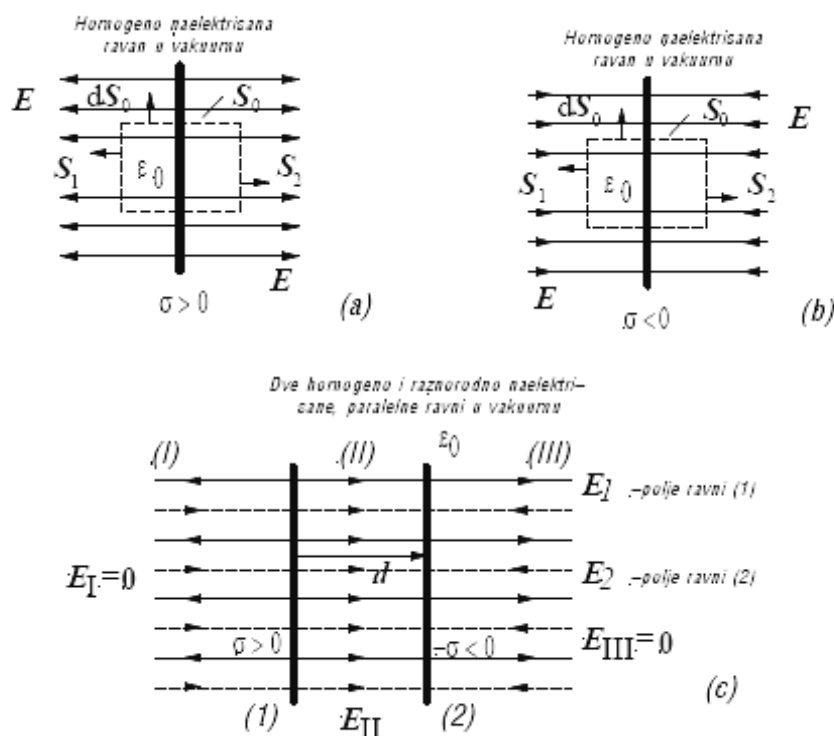
Linije električnog polja usamljenih homogeno naelektrisanih ravni u vakuumu (sl. 11a i 11b) moraju biti normalne na te ravni, odakle se zaključuje da svaka od ravni predstavlja jednu ekvipotencijalnu površ. Zbog simetrije sistema, sve druge ekvipotencijalne ravni moraju biti paralelne sa posmatranim ravnima, a intenzitet električnog polja mora biti isti u tačkama podjednako udaljenim od odgovarajuće ravni. Na sl. 11a i 11b crtkastim linijama predstavljene su cilindrične površi $S_C = S_0 \cup S_1 \cup S_2$ sa osnovicama jednakih površina $S=S_1=S_2$ i izvodnicama konačne dužine, koje su paralelne linijama polja i upravne na odgovarajuću naelektrisanu ravan. Intenzitet električnog polja E isti je u svim tačkama na osnovicama cilindara, tj. $E=E_1=E_2$ gde su E_1 i E_2 vektori jačine polja na osnovicama S_1 i S_2 , respektivno. Pošto su vektorski elementi dS_0 površi omotača S_0 cilindra upravni na linije električnog polja, to je *fluks* polja kroz taj omotač ravan nuli.

U slučaju kada je $\sigma > 0$, primenom Gausovog zakona na površ S_C (sl. 11a), pokazuje se da je intenzitet električnog polja E ove naelektrisane ravni isti u svim tačkama polja:

$$\oint_{S_C} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \underbrace{\int_{S_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_0}_{=0} + \int_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_1 + \int_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_2 = \int_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_1 + \int_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_2$$

$$\oint_{S_C} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_1 + \int_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_2 = E_1 S_1 + E_2 S_2 = 2ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}, \text{ pa je polje naelektrisane ravni:}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}, \text{ sa pravcem i smerom kao na slikama 11.a i 11.b.}$$



Sl. 11

Za homogeno i raznorodno naelektrisanе paralelne ravni (1) i (2) u vakuumu (sl. 11c) sa površinskim gustinama naelektrisanja $\pm\sigma$, na osnovu principa superpozicije zaključujemo da se polja tih ravni poništavaju u oblastima I i III, tj. da je $E_I = E_{III} = 0$, dok je u oblasti II rezultantno polje homogeno i orijentisano od pozitivno prema negativno naelektrisanjoj ravni. Intenzitet polja u oblasti II je $E_{II} = 2E = \sigma/\epsilon_0$.

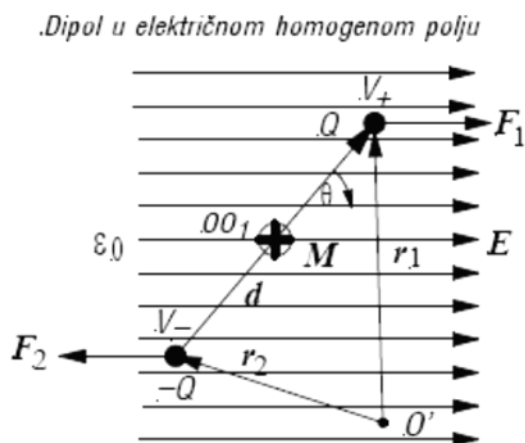
Neka je d rastojanje između homogeno naelektrisanе ravni (1) na potencijalu V_1 i paralelne homogeno naelektrisanе ravni (2) na potencijalu V_2 – mereno u pravcu i smeru linija električnog polja (sl. 11c). Razlika potencijala tih ravni, tj. napon između njih, po definiciji je $U_{12} = V_1 - V_2 = E_{II} \cdot d$. Dakle, intenzitet homogenog električnog polja E_{II} je količnik modula razlike potencijala tačaka na istoj liniji polja i njihovog međusobnog rastojanja d .

4. Električni dipoli

► Električni dipol je sistem od dva punktualna naelektrisanja Q ($Q > 0$) i $-Q$ koja se nalaze na rastojanju d . Dipol karakteriše električni moment $\mathbf{p} = Q \cdot \mathbf{d}$, gde je \mathbf{d} vektor položaja pozitivnog naelektrisanja Q u odnosu na negativno $-Q$ ($d = |\mathbf{d}|$) i zove se i orijentisana dužina dipola.

Strano električno polje usled indukcije izaziva u dielektričnoj supstanciji polarizaciju molekula. Zbog toga se polarizovana supstancija u električnom pogledu može predstaviti ekvivalentnim mnoštvom indukovanih dipola u vakuumu koji osciluju oko ravnotežnih položaja sa amplitudama i frekvencijama koje zavise od temperature sredine. Neka se dipol orijentisane dužine \mathbf{d} i električnog momenta $\mathbf{p} = Q \cdot \mathbf{d}$ nalazi se u homogenom električnom polju \mathbf{E} u vakuumu (sl. 12).

Kulonove sile koje deluju na naelektrisanja Q i $-Q$ redom su $\mathbf{F}_1 = Q \cdot \mathbf{E}$ i $\mathbf{F}_2 = -Q \cdot \mathbf{E}$, a njihovi momenti u odnosu na bilo koju tačku O' u polju su $\mathbf{M}_1 = Q(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{E})$ i $\mathbf{M}_2 = -Q(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{E})$. Kako je $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$ i $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = Q \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{E} = Q \cdot \mathbf{d} \times \mathbf{E} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$, to je $M = |\mathbf{M}| = p \cdot E \cdot \sin\theta$, gde je $p = |\mathbf{p}| = Q \cdot d$. Odatle se zaključuje da ako se dipol nađe u stranom homogenom električnom polju \mathbf{E} na njega neće delovati nikakva mehanička sila, ali će se pojaviti mehanički moment $\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$ koji teži da dipol postavi u pravcu i smeru polja.



Sl. 12

Moment \mathbf{M} je invarijantan u odnosu na izbor referentne tačke O' za koju se određuje, a rotacija dipola za ugao θ u naznačenom smeru odvija se oko ose OO_1 upravne na ravan crteža i orijentisane od posmatrača (što je predstavljeno simbolom " \otimes "), tako da se vrhovi vektora \mathbf{p} i \mathbf{E} najkraćim putem poklope.

Međutim, kada se dipol nađe u stranom nehomogenom električnom polju \mathbf{E} na njega pored mehaničkog momenta deluje i sila $\mathbf{F} = \text{grad}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$. Ovakvo ponašanje dipola u nehomogenom električnom polju koristi se kod jonizacionih prečišćavača vazduha.

5. Električna kapacitivnost metalnih provodnika u vakuumu

Kada se posmatra usamljeno metalno telo u vakuumu naelektrisano količinom elektriciteta Q , tada znamo da u njemu ne postoji električno polje, a da je u tačkama na njegovoj površi okarakterisanim lokalnom gustinom naelektrisanja σ , polje upravno na tu površ i da ima intenzitet $E = |\sigma|/\epsilon_0$. Tačke tela pripadaju ekvipotencijalnom domenu potencijala V . Pozitivna veličina $C = Q/V$, koja ne zavisi ni od Q , ni od V , već jedino od oblika i dimenzija tela, zove se *električna kapacitivnost tela*. Jedinica za kapacitivnost je Farad [F]. Kada se naelektrisano metalno telo nalazi u nekom dielektriku, a ne u vakuumu, tada kapacitivnost tela, osim od oblika i veličine tela, zavisi takođe i od osobina dielektrika kao sredine.

► Potencijal usamljene metalne sfere poluprečnika R u vakuumu, naelektrisane količinom elektriciteta Q je $V = Q/(4\pi\epsilon_0 R)$ u odnosu na referentnu tačku u beskonačnosti. Kapacitivnost te sfere prema prethodnom je $C = 4\pi\epsilon_0 R$, gde je $\epsilon_0 = 10^{-9}/(36\pi)$ [F/m]. Za kapacitivnost Zemlje kao provodne sfere srednjeg poluprečnika $R = 6\,370$ [km] izračunava se $C_z = 708$ [μF].

Ako se u vakuumu obrazuje sistem od dva metalna tela 1 i 2 proizvoljnog oblika, naelektrisana količinama elektriciteta $Q_1 = Q > 0$ i $Q_2 = -Q$ (sl. 15a i 15b) do potencijala V_1 i V_2 , respektivno, tada se u prostoru oko tih tela formira električno polje. Napon, tj. razlika potencijala tih tela je:

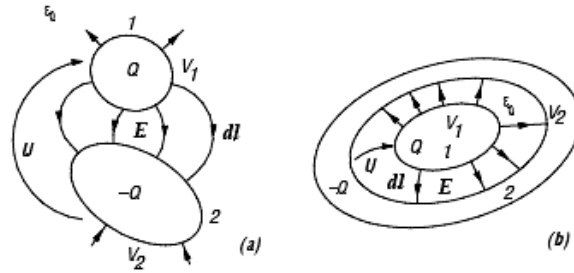
$$U_{12} = V_1 - V_2 = \int_{X_1}^{X_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} > 0$$

gde je putanja integracije proizvoljna, od bilo koje tačke X_1 na telu 1, do bilo koje tačke X_2 na telu 2. Ako u blizini tih tela ne postoje drugi provodnici ili naelektrisanja, linije polja polaze sa pozitivno naelektrisanog tela, završavaju se na negativnom i upravne su na površima tela.

► Sistem od dva provodna (metalna) tela naelektrisana jednakim količinama naelektrisanja suprotnog znaka naziva se *električni kondenzator*. Metalna tela se nazivaju *obloge* ili *elektrode kondenzatora* i mogu se nalaziti u vakuumu ili nekom drugom dielektriku.

Električna kapacitivnost kondenzatora se definiše kao:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{Q}{\int_{X_1}^{X_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}$$



Sl. 15

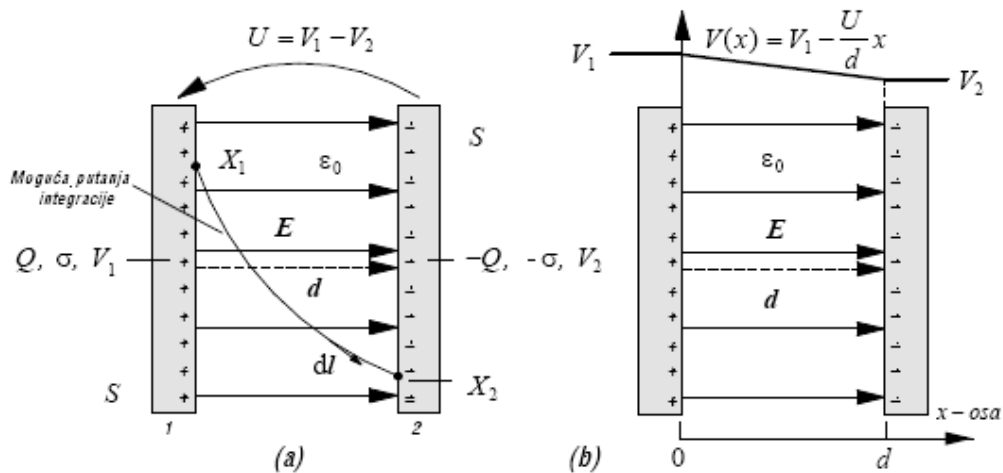
► Kapacitivnost kondenzatora je funkcija oblika, dimenzija i međusobnog položaja elektroda, kao i osobina dielektrika u kome se elektrode nalaze. Jedinica za kapacitivnost je Farad [F].

Kod kondenzatora sa elektrodama jednostavne geometrije (pločasti, sferni i cilindrični — najčešće se sreću u praksi), kapacitivnost je moguće odrediti analitičkom metodom.

6. Određivanje kapacitivnosti kondenzatora sa elektrodama specijalne geometrije

(a) Pločast ili ravan vakuumski kondenzator

Na sl. 16a prikazan je pločast vakuumski kondenzator sa elektrodama u obliku planparalelnih metalnih ploča 1 i 2 površine S postavljenih na odstojanju d i naelektrisanih količinama elektriciteta $\pm Q$ ($Q > 0$).



Sl.16

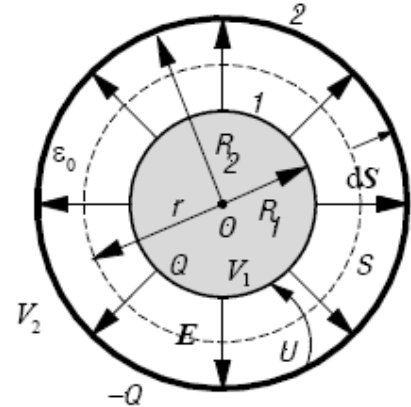
Ako se pretpostavi da je $d=|d|$ znatno manje od lineičnih dimenzija ploča, tada se može smatrati da je površinska gustina naelektrisanja na *unutrašnjim površima* ploča praktično konstantna i jednaka $\pm\sigma = \pm Q/S$ ($\sigma > 0$), da električno polje postoji samo u prostoru između ploča i da je ono homogeno sa intenzitetom $E=|E|=\sigma/\epsilon_0 = Q/(\epsilon_0 \cdot S)$ (ivični efekat se zanemaruje). Neka je V_1 potencijal ploče 1 sa naelektrisanjem Q , a V_2 potencijal ploče 2 sa naelektrisanjem $-Q$. Kod određivanja napona U između ploča može se usvojiti bilo koja putanja integracije, od bilo koje tačke X_1 na elektrodi 1 do bilo koje tačke X_2 na elektrodi 2. Međutim, kada se usvoji da se putanja integracije po pravcu i smeru poklapa sa linijama polja, dobija se:

$$U = V_1 - V_2 = \int_{X_1}^{X_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{d} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \frac{Q}{S \epsilon_0} d \Rightarrow C = \frac{Q}{U} = \epsilon_0 \frac{S}{d}.$$

Egzaktno rešavanje problema raspodele polja kod pločastog kondenzatora, gde bi se vodilo računa o ivičnom efektu, skopčano je sa velikim matematičkim poteškoćama. Na sl. 16b prikazana je raspodela potencijala u polju pločastog kondenzatora.

(b) Sferni vakuumski kondenzator

Na sl. 17 prikazan je sferni vakuumski kondenzator sa elektrodama 1 i 2 u obliku metalne sfere i tanke, metalne, koncentrične sferne ljuske, respektivno. Njegove elektrode mogu biti i dve tanke, metalne, koncentrične sferne ljuske. Spoljašnji poluprečnik elektrode 1 je R_1 , a unutrašnji poluprečnik elektrode 2 je R_2 ($R_1 < R_2$). Kada se elektrode priključe na izvor konstantnog napona U , one se opterete količinama elektriciteta $Q_1=Q>0$ i $Q_2=-Q$ do potencijala V_1 i V_2 , respektivno, pri čemu je $U=V_1-V_2$ napon kondenzatora. Pimenom Gausovog zakona na proizvoljnu koncentričnu sfernu površ poluprečnika $r>R_2$, lako se pokazuje da električno polje ne postoji izvan kondenzatora, a naravno nema ga ni kada je $r<R_1$. Polje je zbog sferne simetrije sistema radialno u vakuumskom prostoru između elektroda, a njegov intenzitet u tačkama koncentrične sferne površi S poluprečnika $R_1 \leq r \leq R_2$ moguće je odrediti, takođe, pomoću Gausovog zakona:



Sl. 17

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S E \cdot dS = E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, R_1 \leq r \leq R_2$$

sa pravcem i smerom kao na slici. Maksimalna jačina polja je neposredno uz unutrašnju elektrodu, za $r = R_1$ i iznosi $E_{\max} = E(r = R_1) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1^2}$.

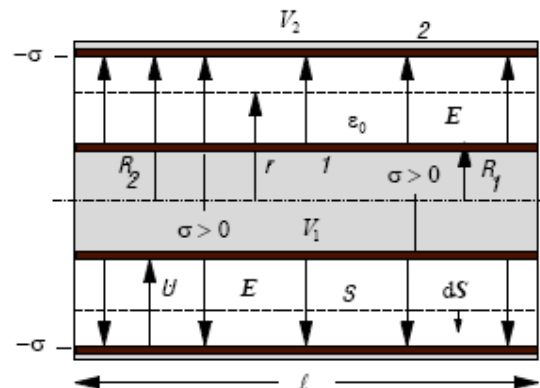
Napon $U=V_1-V_2$ između elektroda 1 i 2 i kapacitivnost C ovog kondenzatora su :

$$U = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{R_1}^{R_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 \cdot R_2}{R_2 - R_1}.$$

(c) Cilindrični vakuumski kondenzator (odsečak koaksijalnog voda)

Prav metalni cilindar 1 kružnog poprečnog preseka i šupalj koaksijalni metalni cilindar 2, oba velike dužine u odnosu na unutrašnji prečnik spoljašnjeg provodnika (sl. 18), obrazuju koaksijalan vod koji se koristi kao transmisioni sistem u telekomunikacijama. Odsečak voda dužine l predstavlja cilindrični kondenzator. Ako se elektrode 1 i 2 priključe na konstantan napon U , one se opterete količinama elektriciteta *podužne* gustine $Q_1'=Q'>0$ i $Q_2'=-Q'$, do potencijala V_1 i



Sl. 18

V_2 , redom ($U = V_1 - V_2$ je napon kondenzatora).

Primenom Gausovog zakona na proizvoljno usvojenu, koaksijalnu cilindričnu površ poluprečnika $r > R_2$ i dužine l lako se pokazuje da električno polje ne postoji izvan kondenzatora, a naravno nema ga ni kada je $r < R_1$. Zanimajući ivične efekte, električno polje u vakuumskom delu prostora između elektroda biće aksijalno simetričnog karaktera, a njegov intenzitet u tačkama cilindrične, koaksijalne površi S poluprečnika $R_1 \leq r \leq R_2$, može se odrediti, takođe, pomoću Gausovog zakona:

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_S E \cdot dS = E \cdot 2\pi r l = \frac{Q' \cdot l}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0 r} \wedge \mathbf{E} = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{r}_0, \quad R_1 \leq r \leq R_2,$$

s obzirom da ne postoji fluks polja kroz osnovice površi S , pošto je ono sa njima paralelno. Sa \mathbf{r} je označen vektor položaja tačaka na površi S u odnosu na osu voda (gledano u poprečnom preseku).

Napon $U = V_1 - V_2$ između elektroda 1 i 2, *podužna* kapacitivnost C' , jačina polja E i njena maksimalna vrednost E_{\max} , kod ovog kondenzatora dati su sledećim relacijama:

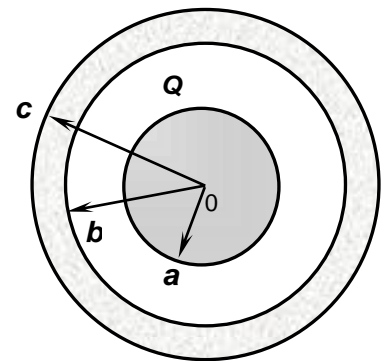
$$U = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right),$$

$$C' = \frac{Q'}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}, \quad E = |\mathbf{E}| = \frac{U}{r \cdot \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}, \quad E_{\max} = E(r = R_1) = \frac{U}{R_1 \cdot \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}.$$

Zanimajući ivične efekte, kapacitivnost C kondenzatora dužine l u ovom slučaju određuje se iz relacije $C = C' \cdot l = 2\pi\epsilon_0 l / \ln(R_2/R_1)$.

1. zadatak: Oko metalne lopte poluprečnika a i naelektrisanja $Q > 0$ u vazduhu, koncentrično je postavljena nenaelektrisana metalna sferna ljuska unutrašnjeg poluprečnika b i spoljašnjeg poluprečnika c . Odrediti:

- Konačnu raspodelu naelektrisanja na sferi i sfernoj ljusci po završetku elektrostatičke indukcije
- Električno polje u čitavom prostoru
- Potencijal sfere i sferne ljuske u odnosu na referentnu tačku u beskonačnosti.



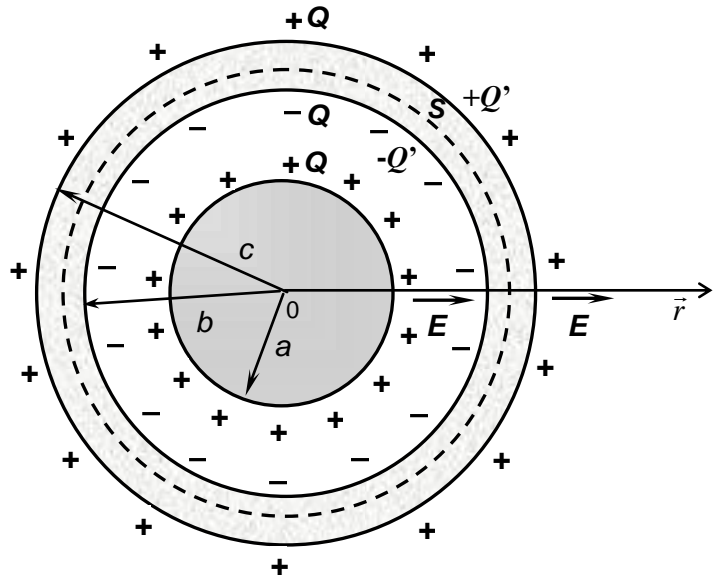
Rešenje:

a) Unošenje provodne sferne ljuske u električno polje uzrokuje elektrostatičku indukciju unutar ljuske. Pod dejstvom električnog polja metalne sfere dolazi do razdvajanja naelektrisanja unutar provodne ljuske. Negativno naelektrisanje privučeno pozitivno naelektrisanom metalnom sferom, „izbija“ na unutrašnju površinu sferne ljuske, dok pozitivno naelektrisanje, težeći da se maksimalno udalji od sfere, „izbija“ na spoljašnju površinu ljuske. Kako je sferna ljuska i dalje elektroneutralna, jer ne postoji provodna putanja kojom bi naelektrisanje moglo doći ili otići sa ljuske, to su indukovane količine naelektrisanja na površinama ljuske jednake po modulu.

Preostaje da se kvantitativno odredi indukovana količina naelektrisanja Q' na površinama ljuske. Primenom Gausovog zakona na zamišljenu sfernu površ S koja se nalazi unutar sferne ljuske

dobija se $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q-Q'}{\epsilon_0}$. Kako u unutrašnjosti metalne ljuske nema elektrostatičkog polja ($\mathbf{E}=0$), to je leva strana Gausovog zakona jednaka nuli, pa je onda i desna strana izraza takođe jednaka nuli, tj. $0 = \frac{Q-Q'}{\epsilon_0}$ iz čega sledi $Q=Q'$.

Dakle na unutrašnju i spoljašnju površinu metalne ljuske izbijaju količine naelektrisanja $-Q$ i $+Q$, respektivno.



b) Neka je \mathbf{r} osa orijentisana kao na slici. Unutar metalne sfere nema električnog polja, pa je $\mathbf{E}(r)=0$, $r < a$. Između sfere i

prstena postoji električno polje čija se jačina jednostavno određuje primenom Gausovog zakona na zamišljenu sfernu površ poluprečnika $a \leq r \leq b$:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}, \mathbf{E}(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \mathbf{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}_0, \mathbf{E}(r) = E(r) \cdot \mathbf{r}_0, \quad a \leq r \leq b, \text{ gde je } \mathbf{r}_0 \text{ jedinični}$$

vektor \mathbf{r} ose. Unutar sferne ljuske, za $b \leq r \leq c$, nema električnog polja $\mathbf{E}(r)=0$. Izvan sferne ljuske, primenom Gausovog zakona na sferu poluprečnika $c < r$, dobija se za intenzitet polja

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q-Q+Q}{\epsilon_0}, \mathbf{E}(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \mathbf{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}_0, \mathbf{E}(r) = E(r) \cdot \mathbf{r}_0, \quad c < r.$$

c) Potencijal metalne sfere u odnosu na referentnu tačku u beskonačnosti za putanju integracije po \mathbf{r} osi je:

$$V_{\text{sfera}} = \int_a^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b E \cdot dr + \underbrace{\int_b^c E(r) \cdot dr}_{=0} + \int_c^\infty E \cdot dr$$

$$V_{\text{sfera}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_c^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_a^b + \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_c^\infty \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right].$$

Potencijal sferne ljuske, pod istim uslovima, je

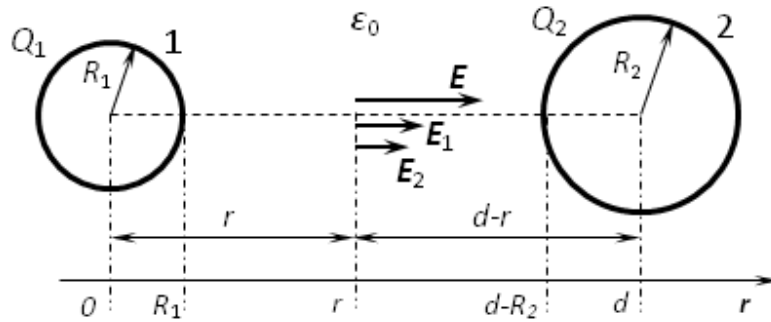
$$V_{\text{ljuske}} = \int_c^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_c^\infty E \cdot dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_c^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \Big|_c^\infty \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c}.$$

Napon između sfere i sferne ljuske je

$$U = V_{\text{sfera}} - V_{\text{ljuske}} = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

2. zadatak: Dve usamljene metalne sfere poluprečnika $R_1=4[\text{mm}]$ i $R_2=6[\text{mm}]$ naelektrisanja $Q_1=-Q_2=2 \cdot 10^{-10}[\text{C}]$ nalaze se u vakuumu na međusobnom rastojanju $d=1[\text{m}]$. Odrediti napon između ovih opti.

Rešenje:



Napon između sfera 1 i 2 jednak je linijskom integralu vektora jačine polja E po nekoj, proizvoljno odabranoj putanji koja ih povezuje.

$$U = V_1 - V_2 = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}, \text{ gde je } \mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2.$$

Rezultantno električno polje E u prostoru oko sfera je superpozicija polja obe sfere. U nekoj tački koja se nalazi na rastojanju $r > R_1$ od centra prve sfere, primenom Gausovog zakona lako se dobija

$$\oint_S \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{S} = E_1 \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_1}{\epsilon_0} \Rightarrow E_1(r) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}.$$

Analognim postupkom, uzimajući u obzir da je druga sfera negativno naelektrisana sledi:

$$\oint_S \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{S} = E_2 \cdot 4\pi(d-r)^2 = \frac{Q_2}{\epsilon_0} \Rightarrow E_2(r) = \frac{|Q_2|}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(d-r)^2}.$$

Pravci i smerovi vektora E_1 i E_2 označeni su na slici. Kako je $Q_1 = |Q_2|$, a vektori E_1 i E_2 kolinearni i istog smera, intenzitet rezultantnog polja je

$$E = E_1 + E_2 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(d-r)^2} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{(d-r)^2} \right).$$

Primitimo da su samo duž pravca koji spaja centre sfera vektori E_1 i E_2 kolinearni. Za putanju integracije pri određivanju napona, zbog jednostavnosti, biramo upravo ovaj pravac.

$$U = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{d-R_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{R_1}^{d-R_2} E dr = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{d-R_2} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{(d-r)^2} \right) dr = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{R_1}^{d-R_2} \frac{dr}{r^2} + \int_{R_1}^{d-R_2} \frac{dr}{(d-r)^2} \right].$$

Uvodeći smenu $u = d - r$ u drugi integral, dobijamo:

$$U = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{R_1}^{d-R_2} + \left(\frac{1}{u} \right) \Big|_{d-R_1}^{R_2} \right] = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{d-R_2} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{d-R_1} \right], \text{ odnosno}$$

$$U_{12} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{d-R_1} - \frac{1}{d-R_2} \right] = 746.38[\text{V}].$$

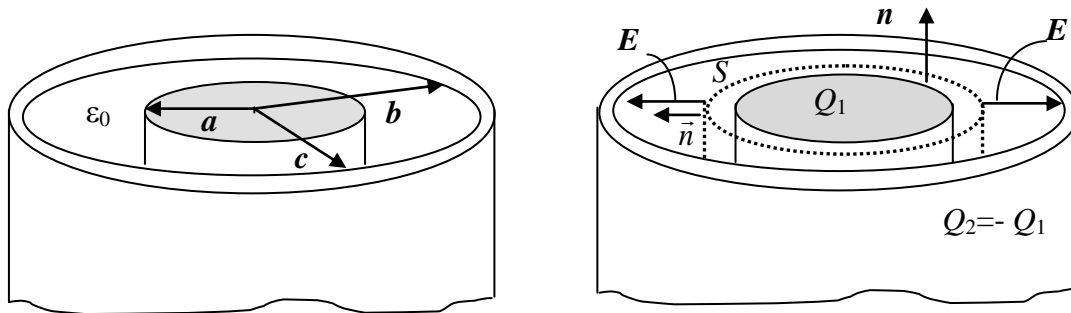
Ako primetimo da je $d \gg R_1, R_2$, napon između sfera može se približno odrediti kao razlika njihovih potencijala, posmatrajući svaku sferu kao usamljenu naelektrisanu metalnu loptu u vakuumu:

$$U_{12} = V_1 - V_2 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} - \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] = 750[\text{V}].$$

3. zadatak:

Koaksijalni vazdušni kabl poluprečnika provodnika $a=0.5[\text{cm}]$, $b=1[\text{cm}]$ i $c=1.1[\text{cm}]$ naelektrisan je naelektrisanjem $Q_1=-Q_2=2\cdot 10^{-8}[\text{C}]$ na dužini $l=20[\text{m}]$. Odrediti:

- vektor elektrostatičkog polja u kablju;
- podužnu kapacitivnost kabla.



Rešenje:

a) Unutrašnji i spoljašnji provodnik koaksijalnog kabla naelektrisani su istom količinom naelektrisanja suprotnog znaka, pa ovaj kabl formira koaksijalni kondenzator. Kao i kod ostalih kondenzatora, elektrostatičko polje postoji samo između njegovih elektroda (provodnika kabla), radijalnog je pravca i usmereno od pozitivne (u ovom slučaju unutrašnje) prema negativnoj (spoljašnjoj) elektrodi.

Prema Gausovom zakonu: $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_1}{\epsilon_0}$ pri čemu je S zamišljena površina valjka visine l .

U svim tačkama osnove tog zamišljenog valjka, ugao između vektora elektrostatičkog polja \mathbf{E} i normale \mathbf{n} na površinu S je prav, pa nema fluksa kroz osnove valjka. Fluks postoji samo kroz omotač valjka:

$$E \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot l = \frac{Q_1}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{Q_1}{2\pi l \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}, \quad a \leq r \leq b.$$

Elektrostatičko polje postoji samo unutar kondenzatora.

Maksimalni intenzitet polja je neposredno uz unutrašnji provodnik,

$$E(r=a) = \frac{Q_1}{2\pi \cdot a \cdot l \cdot \epsilon_0} = 3.6 \cdot 10^3 [\text{V/m}], \text{ a minimalni neposredno uz spoljašnji provodnik kabla}$$

$$E(r=b) = \frac{Q_1}{2\pi \cdot b \cdot l \cdot \epsilon_0} = 1.8 \cdot 10^3 [\text{V/m}].$$

a) Napon između unutrašnje i spoljašnje elektrode je:

$$U_{ab} = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \frac{Q_1}{2\pi r \cdot l \cdot \epsilon_0} \cdot dr = \frac{Q_1}{2\pi \epsilon_0 \cdot l} \cdot \ln \frac{b}{a} = 12.5 [\text{V}]$$

b) Kapacitivnost ovog kabla dužine l je:

$$C = \frac{Q_1}{U_{12}} = \frac{2\pi \epsilon_0}{\ln(b/a)} \cdot l = 1.6 [\text{nF}],$$

a njegova podužna kapacitivnost:

$$C' = \frac{C}{l} = \frac{2\pi \epsilon_0}{\ln(b/a)} = 80 [\text{pF/m}].$$